

Függvények határértéke, folytonossága

MŰVELETEK FÜGGVÉNYEKKEL, ÖSSZETETT FÜGGVÉNY, INVERZ
FÜGGVÉNY

Alapműveletek függvényekkel:

- ▶ **Definíció:** Az f és g függvények összegén, különbségén, szorzatán és hányadosán azt az $F(x)$ függvényt értjük, amelynek értelmezési tartománya f és g értelmezési tartományának közös része és minden, az értelmezési tartományába eső x_0 esetén

- ▶ $F(x_0) = f(x_0) + g(x_0),$

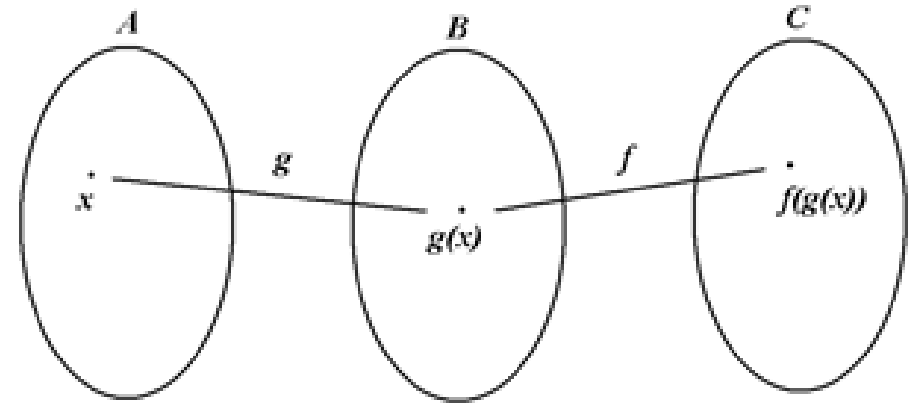
- ▶ $F(x_0) = f(x_0) - g(x_0),$

- ▶ $F(x_0) = f(x_0) \cdot g(x_0),$

- ▶ $F(x_0) = \frac{f(x_0)}{g(x_0)},$ utóbbi esetben g értelmezési tartományát le kell szűkítenünk a $g(x_0) \neq 0$ helyekre.

Összetett függvény fogalma:

- ▶ Két függvény összekapcsolását, egymás utáni alkalmazását tekintjük a két függvény összetételének.
- ▶ Tekintsünk két függvényt:
 - ▶ $g: A \rightarrow B, x \mapsto g(x)$
 - ▶ $f: B \rightarrow C, x \mapsto f(x)$



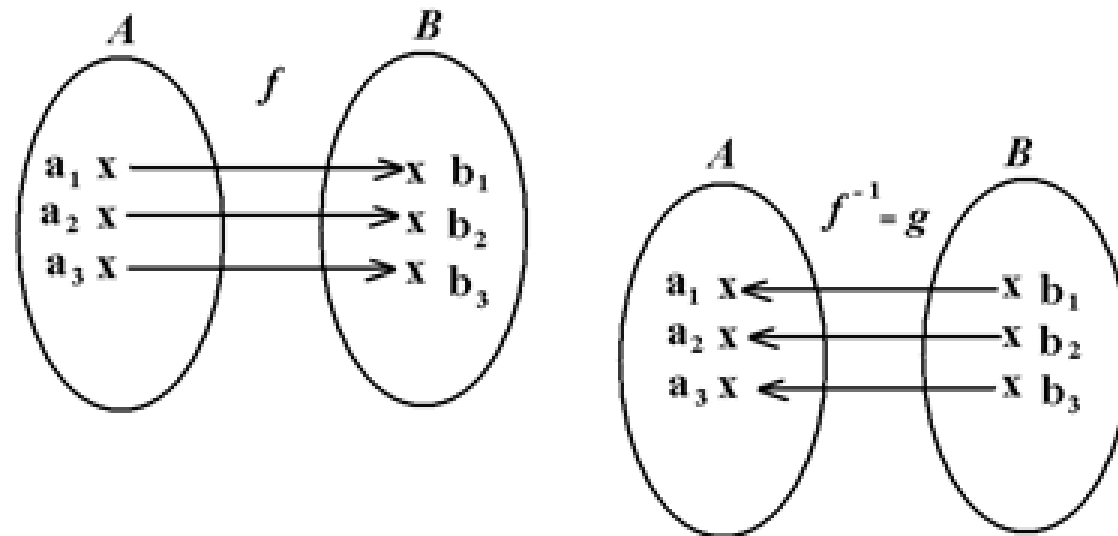
- ▶ Az összetett függvény akkor értelmezhető, ha $g(x)$ eleme az f függvény értelmezési tartományának.

- 
- ▶ **Definíció:** Az $f(x)$ és a $g(x)$ függvényből képzett $F(x)=f(g(x))$ összetett függvényen azt a függvényt értjük, amelynek
 - értelmezési tartománya a $g(x)$ értelmezési tartományának azon részhalmaza, amelynek elemein a $g(x)$ olyan értékeket vesz fel, amelyekre $f(x)$ értelmezve van;
 - hozzárendelési szabálya: x_0 pontban azt az értéket veszi fel, amelyet $f(x)$ a $g(x_0)$ pontban.
 - ▶ **Jelölés:** $f \circ g$
 - ▶ Az összetett függvényeknél nem mindegy, hogy milyen sorrendben alkalmazzuk a két függvényt egymás után: $f \circ g$ azt jelenti, hogy először a g -t alkalmazzuk, utána az f -et.

Inverz függvény fogalma:

- ▶ Egy függvény pontosan akkor invertálható (vagyis van inverz függvénye), ha kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést létesít értelmezési tartománya és értékkészlete között.
- ▶ **Definíció:** Az f függvénynek a g függvény inverze, ha az f értelmezési tartományának minden x elemére, teljesül, hogy $f(x)$ eleme a g értelmezési tartományának és $g(f(x)) = x$.
- ▶ **Jelölés:** f inverze f^{-1} .

- Az inverz függvény a hozzárendelés irányát megfordítja: ha az f és g egymás inverze, akkor az f értelmezési tartománya a g értékkészlete, és az f értékkészlete a g értelmezési tartománya lesz.



- Ha két függvény egymás inverze, akkor grafikonjaik – amennyiben megrajzolhatók – egymásnak tükörképei az $y = x$ egyenesre nézve.
- Szigorúan monoton növekvő függvénynek inverze szigorúan monoton növekvő.

Feladatok:

1. Vizsgáljuk meg az alábbi függvények paritását!

a) $f(x) = x \cdot |x|, x \in \mathbb{R}$

b) $f(x) = x^3 - 3x^2, x \in \mathbb{R}$

c) $f(x) = x^2 - 2|x| + 1, x \in \mathbb{R}$

d) $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}, x \in \mathbb{R}$

2. Határozzuk meg az alábbi függvények (alap)periódusát!

a) $f(x) = \sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{3}$

b) $f(x) = \sin 2x + \cos 3x$

c) $f(x) = \{x\} + \{2x\}$

d) $f(x) = \{x\} + \{2015x\} + \{2016x\}$

Feladatok:

3. Ábrázoljuk az alábbi összetett függvényeket:

a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = |x^2 - 1|$

b) $g: \mathbb{R} \setminus \{-1\} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = \operatorname{sgn}\left(\frac{2x+3}{x+1}\right).$

Az f függvényt jellemezzük is a tanult szempontok alapján.

4. Adjuk meg az $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \log_2 x$ és a $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = x + 3$ függvényekből képezhető $f \circ g$ illetve $g \circ f$ függvényeket és ábrázoljuk őket koordináta rendszerben!

5. Ábrázoljuk közös koordinátarendszerben az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2^x$ és a $g: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = \log_2 x$ függvényeket. Adjuk meg az $f \circ g$ és a $g \circ f$ függvények hozzárendelési szabályát.

Feladatok:

6. Határozzuk meg az alábbi függvények inverzeit!

a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2x + 3$

b) $f: [2; \infty[\rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 - 4x$

c) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sqrt[3]{x - 2}$

d) $f: \mathbb{R} \setminus \{-1\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1-x}{1+x}$

Házi feladatok:

1. Vizsgáld meg az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$ függvényt paritás szempontjából!
2. Ábrázold az $f: \mathbb{R} \setminus \{3\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \left| \frac{2x-5}{x-3} \right|$ függvény grafikonját derékszögű koordinátarendszerben!
3. Ábrázold az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \operatorname{sgn}(x^2 - 4x + 3)$ függvény grafikonját derékszögű koordinátarendszerben!
4. Add meg az $f(x) = \sqrt{2x - 3}$ függvény inverzét!

Versenyfeladatok:

Keressük meg az összes olyan, a valós számokon értelmezett folytonos $f(x)$ függvényt, amely kielégíti az alábbi függvényegyenleteket!

4. $f(x^2 + x + 1) + 2f(x^2 - x + 1) = 3x^2 - x + 6$

5. $2f(x) - 3f\left(\frac{1}{x}\right) = x^2, x \neq 0$

6. $x \cdot f\left(\frac{1}{x}\right) + 2 \cdot f(x) = x - 1, x \neq 0$